

Consignes : 1. L'usage de la calculatrice programmable est interdit
3. L'épreuve comporte trois parties.

2. Le téléphone est interdit dans les salles
4. Le silence est obligatoire

Durée de l'épreuve : 3 heures

PARTIE A.- Recopier et compléter les phrases suivantes (1 à 10). (30 pts / 3 pts par question).

PARTIE C.- Traiter deux (2) des quatre (4) exercices suivants : (40 points)

- 1- Le domaine de définition de la fonction numérique f telle que $f(x) = \frac{x + \ln x}{x}$ est $Df = \dots\dots\dots$
- 2- A et B sont deux réels. Si $A = \int_0^1 \frac{x^3}{x^3 + 1} dx$, alors la valeur exacte de la somme $A + B$ est égale à $\dots\dots\dots$
- 3- Si une variable aléatoire X a pour variance 49 et pour espérance mathématique de X^2 le nombre 3649, alors son espérance mathématique est $E(X) = \dots\dots\dots$
- 4- Dans le développement du binôme $\left(x + \frac{1}{x}\right)^8$, la valeur exacte du terme central est égale à $\dots\dots\dots$
- 5- Soit les points $A(0, 6)$ et $B(-2, 10)$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. La distance du point $C(4; -3)$ à la droite (AB) est le nombre positif $\dots\dots\dots$
- 6- Si $ABCD$ est un losange non aplati du plan, alors les coordonnées du point C dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AD})$ sont $(\dots; \dots)$ et celles de G , centre de gravité du losange, sont $(\dots; \dots)$
- 7- La forme exponentielle du nombre complexe $z = (1 + i\sqrt{3})^4 e^{i\frac{\pi}{3}}$ est $z = \dots\dots\dots$
- 8- Un nombre complexe z est tel que $4\bar{z} = \frac{9}{z}$. Son module est donc $|z| = \dots\dots\dots$
- 9- Si $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique telle que : $U_5 = 3$ et $U_8 = -8$, alors son premier terme est le nombre $\dots\dots\dots$ et sa raison est $r = \dots\dots\dots$
- 10- Si (U_n) est une suite numérique définie par :
$$U_n = \frac{1 - e^n}{1 + e^n} \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \dots\dots\dots$$

PARTIE B.- Obligatoire (30 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 3 - 3 \ln(e^x + 1)$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
b) Déterminer la limite de la fonction $g(x) = [f(x) - (x + 3)]$ en $-\infty$.
Que peut-on dire de la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x + 3$.
c) Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à la droite $(\mathcal{D})$.
- 2) Calculer $f'(x)$, où f' est la fonction dérivée de f .
Étudier les variations de f et construire sa courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. (U_n) et (V_n) sont deux suites réelles définies respectivement par :

$$U_0 = 1; U_{n+1} = \frac{2U_n}{2 + 3U_n}$$

$$\text{et } V_n = \frac{1}{U_n}.$$

- a) Montrer que la suite (V_n) est arithmétique et préciser sa raison.
- b) Exprimer V_n et U_n en fonction de n .
- c) Étudier la monotonie de (U_n) .

2. Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers Ω d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ dont la loi de probabilité est :

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	a	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$

- a) Déterminer a ($a \in \mathbb{R}_+$)
 - b) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X .
 - c) Déterminer et représenter graphiquement la fonction de répartition de X .
3. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le plan vectoriel $\vec{P}$ d'équation $x - 2y + z = 0$ et la droite vectorielle $\vec{D}$ engendrée par le vecteur $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$.
a) Montrer que $\vec{D}$ et $\vec{P}$ sont supplémentaires dans E .
b) Définir analytiquement l'endomorphisme f , symétrie vectorielle de E sur $\vec{P}$ de direction $\vec{D}$.
c) En déduire la matrice de la projection vectorielle g de E sur $\vec{P}$ parallèlement à $\vec{D}$.

4. 1) a) Déterminer le nombre complexe α tel que :
 $\alpha(1 + i) = 1 + 3i$

$$\text{b) Vérifier que } i\alpha^2 = -4 + 3i$$

2) Pour tout nombre complexe z , on pose :

$$f(z) = z^2 - (1 + 3i)z + (-4 + 3i)$$

$$\text{a) Montrer que } f(z) \text{ s'écrit sous la forme } (z - \alpha)(z - i\alpha)$$

$$\text{b) En déduire les solutions dans } \mathbb{C}, \text{ sous forme algébrique, de l'équation } f(z) = 0.$$