

Consignes : 1. L'usage de la calculatrice programmable est interdit 2. Le téléphone est interdit dans les salles
3. Le silence est obligatoire

Durée de l'épreuve : 3 heures

N.B : Le sujet est composé de deux parties A et B. Dans chaque exercice, le candidat est invité éventuellement à faire figurer sur la copie toute trace de recherches, même incomplètes ou non fructueuses, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation.

PARTIE A.- Recopier et compléter les phrases suivantes (1 à 10). (40 pts / 4 pts par question).

1) L'ensemble des solutions réelles de l'équation $\ln x + \ln(2x - 1) = \ln 15$ est $S = \dots\dots\dots$

2) Si $I = \int_0^1 x^2 \sin^2 x dx$ et $J = \int_0^1 x^2 \cos^2 x dx$, alors l'intégrale $I + J$ vaut $\dots\dots\dots$

3) On considère la suite (U_n) définie, pour $n \geq 1$, par $U_0 = 0$; $U_1 = 1$ et $U_{n+1} = 7U_n + 8U_{n-1}$. Les termes U_2 et U_3 ont respectivement pour valeur $\dots\dots\dots$ et $\dots\dots\dots$

4) Si la suite (U_n) définie par :
 $U_0 = 4$ et $U_{n+1} = \frac{U_n}{1 + 3U_n}$, pour tout $n \geq 0$, alors le troisième terme de la suite (U_n) est le nombre réel $\dots\dots\dots$

5) La forme algébrique du nombre complexe z de module $2\sqrt{2}$ et d'argument principal $-\frac{3\pi}{4}$ est $z = \dots\dots\dots$

6) Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, si le point G est le barycentre du système $\{(A, \alpha); (B, \beta) \text{ et } (C, \lambda)\}$ vérifiant la relation $2\vec{GC} - 3\vec{GB} + 2\vec{GA} = \vec{0}$; alors $\alpha = \dots; \beta = \dots$ et $\lambda = \dots$

7) Si X est une variable aléatoire telle que $E(X) > 0$, $E(X^2) = 16$ et $\sigma(X) = 3$, alors $E(X) = \dots\dots\dots$

8) A et B sont deux évènements de l'univers d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$.
Si $p(A \cup B) = \frac{13}{20}$, $p(A) = \frac{2}{5}$ et $p(B) = \frac{3}{10}$, alors $p(A \cap B) = \dots\dots\dots$

9) Si X est une variable aléatoire d'espérance mathématique égale à -2, alors $E(4X - 3) = \dots\dots\dots$

10) Si la distribution statistique suivante est donnée par :

x_i	0,5	1,5	2,5	4	6	7
y_i	0	1	1,5	3,5	4,5	5,5

alors la covariance de cette série double est $\text{cov}(x, y) = \dots\dots\dots$

PARTIE B.-Traiter trois (3) des cinq (5) exercices. (60 pts)

1. Soit f la fonction numérique à variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ et C sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

a) Déterminer le domaine de définition de f .

b) Calculer les limites de f aux bornes des intervalles de définition.

c) Étudier les variations de f .

d) Tracer sa courbe représentative C .

2. Soit U une suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$U_n = \frac{2}{n+5}.$$

a) Calculer U_0 et le 4^{ème} terme de la suite (U_n) .

b) Démontrer que la suite (U_n) est strictement décroissante.

c) Montrer que la suite (U_n) est bornée sur $\mathbb{N}$.

d) Étudier la convergence de cette suite.

3. Soit P un polynôme complexe tel que, $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = z^3 - 2z^2 + 2(2 - 3i)z - 20$

a) Montrer que $z_0 = 2i$ est une des racines de l'équation $P(z) = 0$.

b) Factoriser $P(z)$.

c) Résoudre l'équation $P(z) = 0$.

d) Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par A, B et C les points du plan d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2 solutions de l'équation. Préciser la nature du triangle ABC .

4. Un sac contient 7 boules numérotées de 1 à 7. On tire au hasard et en même temps deux boules du sac. On admet que les tirages sont équiprobables.

a) Quelle est la probabilité de l'évènement A , « les numéros obtenus sont impairs ».

b) On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe la valeur absolue de la différence des 2 nombres obtenus. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X .

c) Déterminer la loi de probabilité de X .

d) Déterminer la fonction de répartition de X .

5. Soit la série statistique suivante :

x	0	1	2	3	4
y	12	10	6	6	2

a) Tracer le nuage statistique dans un repère orthogonal.

b) Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage.

c) Calculer le coefficient de corrélation r .

d) Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x .