

Consignes : 1. L'usage de la calculatrice programmable est interdit 2. Le téléphone est interdit dans les salles
3. Le silence est obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures

N.B : Le sujet est composé de deux parties A et B. Dans chaque exercice, le candidat est invité éventuellement à faire figurer sur la copie toute trace de recherches, même incomplètes ou non fructueuses, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation.

PARTIE A.- Obligatoire (40 pts) / (8 pts / question)

Recopier sur la feuille de mise au net la question accompagnée de la réponse jugée correcte en la justifiant.

1- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ peut s'écrire :

- $f(x) = 1 + e^{-x}$
- $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$
- $f(x) = e^x + e^{-x}$
- $f(x) = e^x - e^{-x}$

2- L'inverse du nombre complexe $Z = \frac{i}{2+i}$ est :

- $\frac{2+i}{2i}$ • $1-2i$ • $1+2i$ • $2i-1$

3- Pour tout entier naturel n , on pose :

$$S_n = 1 + 0,2 + 0,2^2 + \dots + (0,2)^n$$

La limite de cette suite est :

- 1 • 1,25 • $+\infty$ • 0,2

4- f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1+x^2)$

f' est définie sur $\mathbb{R}$ par :

- $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$
- $f'(x) = \frac{x}{1+x^2}$
- $f'(x) = \frac{1+x^2}{2x}$

5- Le nombre de diviseurs de 2695000 est :

- 120 • 240 • 24 • 10

PARTIE B.-

Traiter deux (2) des quatre (4) problèmes (30 pts / problème)

1- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 - \frac{4e^x}{e^{2x} + 1}$$

1) Vérifier que pour tout réel x , on a :

$$f'(x) = \frac{4e^x(e^{2x} - 1)}{(e^{2x} + 1)^2}$$

2) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

La droite d'équation $x = 0$ semble un axe de symétrie de la courbe (C) de f . Démontrer que

cette conjecture est vraie.

2- Un globe-trotter a parié de parcourir 5000 km à pieds.

Frais et dispo, il peut parcourir 50 km en une journée. Mais chaque jour, la fatigue s'accumule et sa performance diminue de 1% tous les jours, c'est-à

$$\text{dire } d_2 = d_1 - \frac{1}{100}d_1. (d_1 = 50 \text{ km})$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on note d_n la distance parcourue le $n^{\text{ème}}$ jour et D_n la distance totale parcourue au bout de n jours, en km $D_n = d_1 + d_2 + \dots + d_n$.

- 1) Préciser la nature de la suite d . En déduire l'expression de d_n en fonction de n .
- 2) Exprimer D_n en fonction de n .
- 3) Déterminer la limite de la suite D . Le globe-trotter peut-il gagner son pari?

3- On donne la série statistique double suivante :

x_i	0,8	1,2	2,4	4	4,6	4,8	6	6,4
y_i	7,6	8,4	12	17,2	19	23	25,8	29,2

- 1) Représenter par un nuage de points $(x_i; y_i)$ la série statistique dans un repère orthogonal. On prendra 1 cm pour 1 en abscisse et 1 cm pour 3 en ordonnée.
- 2) Déterminer les coordonnées du point moyen G_1 des quatre premiers points du nuage.
- 3) Déterminer les coordonnées du point moyen G_2 des quatre derniers points du nuage.
- 4) Déterminer l'équation de la droite passant par les points G_1 et G_2 .
- 5) Tracer la droite (G_1G_2) .

4- Sur l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4\}$, on définit une loi de probabilité :

x_i	1	2	3	4
y_i	p_1	p_2	p_3	p_4

- 1) Déterminer les réels p_1, p_2, p_3 et p_4 sachant qu'ils sont en progression arithmétique et que l'espérance mathématique de la loi de probabilité sur E est égale à 3.
- 2) Calculer la variance correspondante.
- 3) Déterminer la fonction de répartition associée, puis tracer sa courbe cumulative.

Consignes : 1. L'usage de la calculatrice programmable est interdit 2. Le téléphone est interdit dans les salles
3. Le silence est obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures

N.B. : Le sujet est composé de deux parties A et B. Dans chaque exercice, le candidat est invité éventuellement à faire figurer sur la copie toute trace de recherches, même incomplètes ou non fructueuses, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation.

PARTIE A.- Obligatoire (40 pts) / (8 pts / question)

Recopier sur la feuille de mise au net la question accompagnée de la réponse jugée correcte en la justifiant.

- 1- Quelle est l'aire, en unités d'aire, de l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $0 \leq x \leq \pi$ et $0 \leq y \leq \sin^2 x$?

• $\frac{\pi}{4}$ • $\frac{\pi}{2}$ • $\int_0^\pi (1 - \cos 2x) dx$ • $\frac{2}{\pi}$

- 2- Si la suite (U_n) est arithmétique de raison a , avec $U_1 = 12$ et $U_3 = 48$, alors que vaut a ?

• 18 • 12 • 2 • -2

- 3- Quelles sont, dans $\mathbb{Z}$, les solutions de l'équation $3x \equiv 5(7)$ proposées parmi les suivantes?

• $3 + 7k$ • $4 + 7k$ • $6 + 7k$ • $7k$ avec k entier relatif.

- 4- Quelle est la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' = 2$ qui prend la valeur 0 au point $x_0 = 1$ et dont la dérivée prend la valeur 1 au point $x_0 = 1$?

• $x \mapsto x^2 - x$ • $x \mapsto x^2$
• $x \mapsto x^2 + x$ • $x \mapsto x^2 - x + 4$

- 5- Une urne comporte cinq boules noires et trois boules rouges indiscernables au toucher. On extrait successivement et sans remise deux boules dans l'urne. Quelle est donc la probabilité d'obtenir deux boules rouges?

• $\frac{2}{3}$ • $\frac{3}{32}$ • $\frac{3}{28}$ • $\frac{37}{56}$

PARTIE B.-

Traiter deux (2) des quatre (4) problèmes (30 pts / problème)

- 1- Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 12]$ par :
 $f(t) = 30e^{-0,15t}$.

On suppose qu'après injection, la quantité de substance médicamenteuse présente dans le sang à l'instant t (exprimé en heures) est donnée par $f(t)$ (exprimée en mg/L), pour t variant de 0 à 12 heures.

- 1) a) Étudier le sens de variation de la fonction f .
b) Calculer, à 10^{-1} près, la quantité de substance présente dans le sang 12 heures après l'injection.

- 2) a) Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[0; 12]$ par : $F(t) = -200e^{-0,15t}$.

Montrer que F est une primitive de f sur $[0; 12]$.

- b) Soit l'intégrale : $I = \int_0^{10} f(t) dt$. Calculer la valeur exacte de I , puis en donner la valeur arrondie au centième près.

- c) En déduire, à un dixième de milligramme près, la quantité moyenne de substance médicamenteuse présente dans le sang pendant les 10 heures qui suivent l'injection.

- 2- 1) Écrire la liste de tous les nombres premiers qui sont inférieurs à 50.
2) Montrer que le nombre 1517 n'est pas premier.
3) Déterminer tous les couples d'entiers naturels vérifiant l'égalité $x^2 = y^2 + 1517$.

- 3- On considère les points $A(2; -5; 1)$; $B(-1; 2; 4)$; $C(3; 4; -1)$ et $D(-2; 3; 2)$

Soient I et J les milieux respectifs des segments $[BD]$ et $[AC]$, et G le centre de gravité du triangle ABC .

Soit le point K défini par :

$$\overrightarrow{DK} = \frac{3}{4} \overrightarrow{DG}.$$

- 1) Déterminer les coordonnées des points I , J , G et K .
2) Justifier que le point K appartient au segment $[IJ]$.

- 4- On place un capital initial C_0 de 70 000 gourdes à intérêts composés au taux annuel de 9%.

Soit C_n le capital dont on dispose au bout de n années.

- 1) Montrer que (C_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.

- 2) Au bout de combien d'années de placement, le capital acquis dépassera-t-il le triple du capital initial?

Le résultat dépend-t-il du capital C_0 ?

Consignes : 1. L'usage de la calculatrice programmable est interdit 2. Le téléphone est interdit dans les salles
3. Le silence est obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures

N.B. : Le sujet est composé de deux parties A et B. Dans chaque exercice, le candidat est invité éventuellement à faire figurer sur la copie toute trace de recherches, même incomplètes ou non fructueuses, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation.

PARTIE A.- Obligatoire (40 pts) / (8 pts / question)

Recopier sur la feuille de mise au net la question accompagnée de la réponse jugée correcte en la justifiant.

- 1- Une machine produit automatiquement des pièces cylindriques. Réglée initialement pour un diamètre de 8 mm, elle se dérègle en cours d'initialisation. Les résultats sont les suivants.

Numéro de la pièce : x_i	10	20	30	40	50
Diamètre (mm) de la pièce : y_i	8,03	8,00	8,01	8,01	8,02

60	70	80	90
8,03	8,03	8,04	8,05

Quelle est donc la covariance de x et y ?

• -59,39 • -39,59 • 19,39 • 39,19

- 2- Soit A le point d'affixe $\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$. Si B est un point tel que le triangle OBA soit direct, rectangle et isocèle en O . Quel est alors son affixe?

• $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$ • $\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}$ • $-1+i$ • $2i$

- 3- L'égalité $e^{\ln x} = x$ est vraie pour tout réel x appartenant à l'un des ensembles suivants. Lequel?

• $[0; +\infty[$ • $\mathbb{R}$ • $]0; +\infty[$ • $[-1; +\infty[$

- 4- On place 20 000 gourdes à intérêts composés au taux annuel de 1,8% sur un compte d'épargne. Pour tout entier n , on note U_n le capital obtenu au bout de n années de placement. Ainsi, $U_0 = 20\,000$. Au bout de combien d'années le capital dépassera-t-il 24 000 gourdes?

• 9 ans • 10 ans • 11 ans • 12 ans

- 5- A et B sont deux événements indépendants d'un espace probabilisé fini $(\Omega, P(\Omega), p)$. Si $p(A \cup B) = \frac{4}{5}$ et

$p(\overline{A}) = \frac{3}{5}$, quelle est alors la probabilité de B ?

• $\frac{2}{5}$ • $\frac{2}{3}$ • $\frac{3}{5}$ • $\frac{1}{2}$

PARTIE B.-

Traiter deux (2) des quatre (4) problèmes (30 pts / problème)

- 1- Une entreprise fabrique des objets. Le coût de fabrication de x objets, en gourdes, est donné par :

$C(x) = 400e^{0,01x}$ pour tout entier $x \in [0, 220]$.

- Calculer $C(0)$. Que représente ce nombre pour l'entreprise?
- a) Calculer la recette générée par la vente de 60 objets; si l'unité est vendue 15 gourdes.
b) Exprimer en fonction de x la recette, en gourdes, générée par la vente de x objets. On la notera $R(x)$.
- On note, pour $x \in [0, 220]$; $B(x)$ le bénéfice journalier (éventuellement négatif) en gourdes.

- Donner l'expression de $B(x)$ en fonction de x .
- On admet que la fonction B est dérivable sur l'intervalle $[0, 220]$ et on note B' sa fonction dérivée. Justifier que $B'(x) = 15 - 4e^{0,01x}$.

- En déduire le nombre d'objets que l'entreprise doit fabriquer pour que le profit soit maximal.

- 2- Une population a une croissance instantanée relative constante, à tout instant t , égale à 1,5%. A $t = 0$, la population est de 27 millions d'individus. Déterminer la population $P(t)$ en fonction de t . Calculer la dérivée de la fonction $P(t)$.

- 3- 1) a) Vérifier que $(1+i)^2 = 2i$

- b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = 2i$

- 2) Déterminer toutes les suites géométriques (U) telles

que : $U_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $U_4 = -\sqrt{3} + i$

- 3) On considère celle de ces suites dont la raison a une partie réelle positive. Calculer U_{19} , donner son module, un argument et sa forme algébrique.

- 4- Une grande enveloppe contient les douze figures d'un jeu de carte : les quatre rois, les quatre dames et les quatre valets. On tire simultanément et au hasard, cinq cartes de l'enveloppe.

- Calculer la probabilité d'obtenir exactement 3 rois.
- Calculer la probabilité d'obtenir au moins un roi
- Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de rois obtenus.

- 1) Quelles sont les valeurs prises par X ?

- 2) Donner la loi de probabilité de X sous la forme d'un tableau

- 3) Calculer son espérance mathématique. Interpréter le résultat

- 4) Calculer la probabilité de l'événement $(X \geq 2)$

- 5) Définir la fonction de répartition F de X et représenter F graphiquement.

Consignes : 1. L'usage de la calculatrice programmable est interdit 2. Le téléphone est interdit dans les salles
3. Le silence est obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures

N.B : Le sujet est composé de deux parties A et B. Dans chaque exercice, le candidat est invité éventuellement à faire figurer sur la copie toute trace de recherches, même incomplètes ou non fructueuses, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation.

PARTIE A.- Obligatoire (40 pts) / (8 pts / question)

Recopier sur la feuille de mise au net la question accompagnée de la réponse jugée correcte en la justifiant.

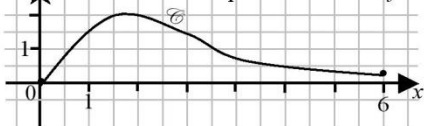
- La fonction de coût total d'une production de x centaines d'objets est donnée, en millier d'euros, par $f(x) = 0,5x^2 - 3x + 5 + 4\ln x$, où $x \in [0,5; 8]$. Sachant que le coût marginal est assimilé à la dérivée du coût total, le coût marginal est déterminé. Lequel des énoncés suivants est donc vrai?
 - c'est $f'(x) = x - 3 + \frac{1}{x}$ • il est toujours croissant
 - il admet un minimum en 2
 - il est toujours décroissant
- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, l'ensemble des points M d'affixe z telle que $\arg z = \frac{\pi}{4} (2\pi)$ est déterminé. Lequel des énoncés suivants est donc vrai?
 - c'est la droite d'équation $x = \frac{\pi}{4}$
 - il est réduit au point $A\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$
 - il a pour équation $y = x$ et $x > 0$
 - il a pour équation $y = -x$ et $x > 0$
- $5^n \equiv 2 \pmod{7}$ s'il existe un entier naturel p vérifiant l'une des égalités suivantes. Laquelle?
 - $n = 6p + 3$ • $n = 6p$ • $n = 6p + 4$ • $n = 5p$
- Les solutions sur $]0; +\infty[$ de l'équation différentielle $xy' = \ln x$ sont parmi les fonctions suivantes. Quelles sont-elles?
 - $x \mapsto \frac{(\ln x)^2}{2} + k$ • $x \mapsto 2(\ln x)^2 + k$ ($k \in \mathbb{R}$)
 - $x \mapsto \frac{1}{2} \ln x + k$ • $x \mapsto (\ln x)^2 + k$
- Sur n lancers successifs et indépendants d'un dé tétraédrique bien équilibré, le plus petit entier naturel n tel que la probabilité d'obtenir au moins une fois la face n° 1 soit supérieure à 0,999 est l'un des suivants. Lequel?
 - 25 • 23 • 24 • 22

PARTIE B.-

Traiter deux (2) des quatre (4) problèmes (30 pts / problème)

- Une société extrait du gravier pour la construction d'autoroutes. Elle envisage l'ouverture d'un nouveau site d'extraction. On admet qu'au bout de x centaines de jours d'exploitation, la production journalière sur ce site, en millier de tonnes, est exprimée par : $f(x) = (2x^2 + 3x)e^{-x}$, où $x \in [0; 6]$.

On note C la courbe représentative de f ci-après :



- Démontrer que, pour tout réel x de $[0; 6]$: $f'(x) = (-2x^2 + x + 3)e^{-x}$.
 - Établir le tableau de variations de f sur $[0; 6]$.
 - Déterminer au bout de combien de jours après l'ouverture du site, la production journalière sera maximale. Quelle est cette production maximale en millier de tonnes?
- Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ sur $[0; 6]$. En utilisant le graphique, encadrer chaque solution entre deux entiers consécutifs.
 - À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de jours, après l'ouverture du site, la production journalière, après avoir atteint son maximum, sera revenue à 1 000 tonnes.
- On lance un dé non truqué trois fois de suite.
 - Quelle est la probabilité de l'événement :
 - A : « obtenir 3 fois le 6 »?
 - B : « obtenir 2 fois le 6 »?
 - On lance maintenant ce dé 50 fois. On note X la variable aléatoire comportant le nombre de 6 obtenu. Calculer $p(X = 10)$.
- Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son terme général $U_n = \frac{5}{2^n}$.
 - La suite (U_n) est-elle arithmétique ou géométrique? Donner sa raison et son premier terme.
 - Calculer le sixième terme et en donner une valeur approchée.
 - Donner le sens de variation de (U_n) .
 - Calculer la limite de la suite (U_n) .
 - Calculer : $U_0 + U_1 + \dots + U_{10}$.
- Une entreprise fabrique et vend des lots de pompes à injection. Le tableau ci-dessous donne le pourcentage y de pompes à injection d'un lot qui ont une panne au cours des x années d'utilisation. Chaque couple de modalités (x_i, y_i) a pour effectif 1.

Nbre x_i de semestres	1	2	3	4	5	6	7
Pourcentage y_i	0	2	4	8	11	14	17

8	9	10
20	23	27

 - Déterminer la droite de Mayer ajustant le nuage de points qui représente cette série double.
 - Ajuster le nuage de points par la méthode des moindres carrés.

● **N.B : Série LLA**

Partie A : 1, 3 5 obligatoires. (10 pts / question)

Partie B : 2, 3, 4 traiter 2 (deux) des 3 (trois). (35 pts / problème)

Consignes : 1. L'usage de la calculatrice programmable est interdit 2. Le téléphone est interdit dans les salles
3. Le silence est obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures

N.B : Le sujet est composé de deux parties A et B. Dans chaque exercice, le candidat est invité éventuellement à faire figurer sur la copie toute trace de recherches, même incomplètes ou non fructueuses, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation.

PARTIE A.- Obligatoire (40 pts) / (8 pts / question)

Recopier sur la feuille de mise au net la question accompagnée de la réponse jugée correcte en la justifiant.

- 1- Le taux de réussite au concours d'admission pour une école post-Bac est de 10%. On rencontre au hasard 8 candidats et on les interroge sur leur résultat. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de candidats admis parmi les 8 candidats. La probabilité d'obtenir 2 candidats admis est : $p(X = 2)$ qui donne l'un des nombres suivants. Lequel?
 - $C_8^2(0,1)^2$ • $C_8^2(0,9)^6$
 - $C_8^2(0,1)^2(0,9)^6$ • $C_8^2(0,1)^6(0,9)^2$
- 2- Pour une série statistique double $(x; y)$; la droite de régression de y en x est donnée par l'une des formules suivantes. Laquelle?
 - $y = ax$ • $y = ax + b$ • $y = ax - b$ • $y = ax + b$
- 3- Quelle est la limite de la suite géométrique (U_n) de raison 1,5 et de terme initial 2?
 - 0 • 2 • +∞ • 3
- 4- Si la fonction f est définie sur $]0; +\infty[$ par :
 $f(x) = x(\ln x - 1)$, quelle est alors l'expression de sa dérivée $f'(x)$?
 - $\ln x$ • $\frac{1}{x} - 1$ • $\ln x - 1$ • $x \ln x$
- 5- Si l'entier 8×10^n admet 154 diviseurs, quelle est alors la valeur de n ?
 - 10 • 7 • 8 • 11

PARTIE B.-

Traiter deux (2) des quatre (4) problèmes (30 pts / problème)

- 1- Un marchand de chaussures vend des trotteurs à 140 dollars la paire. Son bénéfice mensuel, en dollars, sur cet article est donné par $B(x) = x(48 - 0,5x)$, où x est le nombre de paires trotteurs.
 - 1) Étudier les variations du revenu.
En déduire le nombre de paires de trotteurs rendant le revenu maximal.
 - 2) a) Exprimer le chiffre d'affaires de ce marchand sur la vente de ces trotteurs en fonction de x .
b) Déterminer le nombre de paires de trotteurs à vendre permettant d'obtenir un revenu supérieur au quart du chiffre d'affaires sur cet article.

- 2- 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) :
 $16f'' + f = 0$
2) Déterminer la solution f de (E) vérifiant : $f(0) = 1$ et $f(2\pi) = -\sqrt{3}$.
3) Démontrer que, pour tout nombre réel x ,
 $f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$.
- 3- Chaque mois, un investisseur injecte du capital pour dynamiser une entreprise. De 30 000 gourdes au départ, le capital injecté diminue chaque mois de 10%. On note U_n le capital injecté au n -ième mois de diminution, en gourdes.
 - 1) a) Justifier que, pour tout entier n :
 $U_n = 30000 \times 0,9^n$.
b) Déterminer la limite de ce capital injecté.
c) Déterminer le mois où le capital injecté devient inférieur à 10 000 gourdes.
 - 2) Cet investisseur doit déclarer en frais le montant de l'investissement total, somme des capitaux injectés.
 - a) Exprimer, en fonction de n , la somme :
 $1 + 0,9 + 0,9^2 + \dots + 0,9^n$.
 - b) Montrer que l'investissement total au bout de n mois, capital de départ inclus, s'exprime en fonction de n par :
 $S_n = 300\,000 - 270\,000 \times 0,9^n$.
 - c) Déterminer la limite de l'investissement total.
 - d) Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation :
 $300\,000 - 270\,000 \times 0,9^n \geq 250\,000$.
Interpréter le résultat obtenu.

- 4- L'évolution de 1985 à 1989 du salaire horaire moyen d'un ouvrier, dans un pays en voie de développement donné, est consignée dans le tableau ci-dessous.

Années (x_i)	1985	1986	1987	1988	1989
Salaire horaire (y_i) moyen en gourdes	1650	1760	1930	2020	2220

- 1) Représenter graphiquement les variations de ce salaire horaire moyen.
- 2) Ajuster à la règle le nuage de points obtenu par une droite dont on déterminera une équation cartésienne.
- 3) Ajuster le nuage de points par la méthode des moindres carrés.
- 4) En admettant que cette évolution se poursuive, donner une estimation du salaire horaire moyen d'un tel ouvrier en 2001.

Consignes : 1. L'usage de la calculatrice programmable est interdit 2. Le téléphone est interdit dans les salles
3. Le silence est obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures

N.B : Le sujet est composé de deux parties A et B. Dans chaque exercice, le candidat est invité éventuellement à faire figurer sur la copie toute trace de recherches, même incomplètes ou non fructueuses, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation.

PARTIE A.- Obligatoire (40 pts) / (8 pts / question)

Recopier sur la feuille de mise au net la question accompagnée de la réponse jugée correcte en la justifiant.

- 1- Le bénéfice, en millier de gourdes, d'une production de q kg de produit de beauté est donné par :

$$f(q) = -3q^2 + 6q - 1,5.$$

Quelle est la valeur moyenne de ce bénéfice pour une quantité q de produit, variant de 0 à 2kg?

• 1 • $\frac{1}{2}$ • 2 • $\frac{17}{2}$

- 2- La suite (V_n) est définie pour tout entier naturel n par :

$V_n = 0,8^n$. Quelle est la limite de (V_n) , lorsque n tend vers $+\infty$?

• 0 • 0,8 • $+\infty$ • 8

- 3- L'inéquation $12,5(0,95)^n \leq 7$ a pour ensemble-solution celui formé avec les entiers de l'un des intervalles suivants. Lequel?

• $[0; 11]$ • $[11; +\infty[$ • $[12; +\infty[$ • $]-\infty; 12]$

- 4- Quel est le nombre congru à 5 modulo 11?

• 527 • 11125 • -380 • -552

- 5- Si z est un nombre complexe, quel est alors le conjugué de $z + 3i + 2$?

• $z + 3i + 2$ • $\bar{z} - 3i + 2$ • $z - 3i + 2$ • $\bar{z} - 3i - 2$

PARTIE B.-

Traiter deux (2) des quatre (4) problèmes (30 pts / problème)

- 1- Une entreprise fabrique, chaque jour, entre 100 et 1 400 exemplaires d'un certain type de pièce pour téléphone mobile. On admet que, lorsque x centaines d'exemplaires de cette pièce sont fabriqués, le coût moyen de fabrication d'une pièce, en gourdes, est :

$$f(x) = \frac{x + 1 - \ln(x)}{x}, \text{ où } 1 \leq x \leq 14.$$

- 1) a) Montrer que, pour tout réel x de $[1; 14]$:

$$f'(x) = \frac{\ln(x) - 2}{x^2}.$$

- b) Résoudre l'inéquation $\ln(x) - 2 \geq 0$.

En déduire le tableau de signes de $f'(x)$ sur $[1; 14]$.

- 2) a) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[1; 14]$.

On arrondira les valeurs aux bornes à 0,01 près.

b) En déduire la quantité de pièces à fabriquer, à l'unité près, pour que le coût moyen soit minimal. Préciser ce coût moyen minimal.

Donner la valeur arrondie au centime de gourdes près.

- 3) a) Résoudre, dans $[1; 14]$, l'équation $f(x) = 1$.

b) En déduire la quantité q de pièces à fabriquer, en centaine, pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit une gourde.

Arrondie à 10^{-2} centaine près.

c) Justifier que, pour toute quantité comprise entre 272 et 1 400 pièces, le coût moyen reste inférieur à 1 gourde la pièce.

- 2- Déterminer la fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $2g'(x) + g(x) = 0$ et dont la courbe représentative (C) admet en son point d'abscisse -2 une tangente de coefficient directeur $\frac{3}{5}$.

- 3- On étudie la quantité y d'un produit offert sur le marché, quantité en milliers de tonnes suivant le prix x au kg.

x_i	4	5,2	6	7,2	8
y_i	5,6	8	10,4	15,2	17,1

- a) Représenter cette série dans un repère orthogonal.
b) Déterminer le point moyen G du nuage de points et le placer.

- c) Calculer :

- 1) la covariance de x et y .
2) la variance de x .

- d) on envisage un ajustement affine pour modéliser l'évolution de la quantité y du produit à offrir sur le marché.

Déterminer l'équation réduite de la droite de régression de y en x donnant une relation affine sur la quantité en fonction de prix.

- e) Exprimer le prix x en fonction de la quantité.

(On donnera sous la forme $x = my + p$, où m et p sont des arrondis à 10^{-3} près)

- 4- Dans une bibliothèque, on recense 15 000 ouvrages fin 2010. À la fin de chaque année, on constate que 5% des livres sont perdus et on achète 1 000 nouveaux ouvrages. Pour tout entier n , on note U_n le nombre de livres de la bibliothèque à la fin de l'année 2010 + n

- 1) a) Calculer le nombre d'ouvrages de la bibliothèque fin 2011 et fin 2012.

b) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n .

- 2) On pose $V_n = 20000 - U_n$.

a) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison 0,95.

b) En déduire que pour tout entier n :

$$U_n = 20000 - 5000 \times 0,95^n.$$

c) Déterminer la limite de la suite (U_n) .

- 3) Déterminer en quelle année le nombre d'ouvrages de la bibliothèque dépassera 19 000.