MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE (MENFP)

EXAMENS DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES

SESSION ORDINAIRE – JUIN / JUILLET 2015

PHILO C-D

MATHÉMATIQUES

Matricule

***Consignes :** 1. L'usage de la calculatrice programmable est interdit 2. Le téléphone est interdit dans les salles 3. L'épreuve comporte trois parties. 4. Le silence est obligatoire*

Durée de l'épreuve : 4 heures

PARTIE A.- Recopier et compléter les phrases suivantes (1 à 10). (30 pts / 3 pts par question).

1- L'égalité $e^{\ln x} = x$ est vraie pour tout réel x appartenant à ......$\mathbb{R}_+^*$......

2- Dans un plan muni d'un repère orthogonal, si l'on prend $\|\vec{i}\| = 3cm$ et $\|\vec{j}\| = 2cm$, alors l'aire de la région définie par $0 \le x \le 1$ et $0 \le y \le x^2$ vaut ....

3- Si z est un nombre complexe tel que $z = \left(\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right)$, alors la forme trigonométrique de z^8 est ....

4- La partie imaginaire du nombre complexe $Z = \dfrac{4}{1+i\sqrt{3}}$ est ....

5- Si (U_n) est une suite arithmétique définie par $U_1 = -4$, $U_n = 91$ et $S_n = 870$, alors le nombre n de ses termes est ..$n = 20$

6- Si (U_n) est une suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2}$, alors $U_{n+1} - U_n =$ ....

7- On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. Le produit $A \times B$ est égal à : ....

8- On considère un système de points pondérés $S = \{(A, a); (B; b)\}$; a et b réels non nuls. Si C est le barycentre de ce système et que : $2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$, on a alors $a = \ldots\ldots$ et $b = \ldots\ldots$

9- Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un univers Ω dont la loi de probabilité est :

x_i	1	2	3
$p(x_i)$	$\frac{2}{9}$	x	y

Si $E(X) = 2$, alors $x =$........ et $y =$ ......

10- Un sac contient 7 boules dont 4 rouges et 3 noires. Si on tire deux boules du sac l'une après l'autre et sans remise, alors la probabilité d'obtenir une boule de chaque couleur est ....

PARTIE B.- Obligatoire (30 points)

b) Justifier que $f(x)$ peut s'écrire : $f(x) = e^x\left(\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} -\right.$

En déduire la limite de f en $+\infty$

c) Étudier les variations de f et tracer l'allure de la cou représentative de f dans un repère orthogonal.

PARTIE C.- Traiter deux (2) des quatre (4) exercices suivants :(40 points)

1. On définit la suite U par : $U_0 = 13$ et, pour tout enti naturel n, $U_{n+1} = \frac{1}{5}U_n + \frac{4}{5}$, et la suite (S_n) sur $\mathbb{N}$ par $S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n - n - 1$

a) Montrer que la suite V définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = U_n - 1$ est géométrique de raison $\frac{1}{5}$.

b) Exprimer U_n en fonction de n. Quelle est la limi de la suite (U_n) ?

c) Déterminer le sens de variation de la suite (S_n).

d) Calculer S_n en fonction de n.

e) En déduire la limite l de la suite S.

2. On donne les nombres complexes suivants : $Z_1 = -2 + 2i$ et $Z_2 = -1 - i\sqrt{3}$

a) Déterminer le module et un argument de Z_1 et Z_2

b) Écrire sous forme trigonométrique chacun des complexes suivants :

1) $\dfrac{(Z_1)^3}{(Z_2)^2}$ 2) $\overline{Z}_2$, $\dfrac{1}{Z_1}$

3. Soit E un espace vectoriel réel de base $(\vec{i}, \vec{j})$. On considère les sous espaces vectoriels F et G définis respectivement par leurs équations :

$F: 2x - 3y = 0$ et $G: x + 4y = 0$

1) Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

2) Définir analytiquement l'endomorphisme S, symétrie vectorielle de E par rapport à F parallèlement à G.

3) En déduire l'expression analytique de l'endomorphisme p, projection vectorielle de E sur G parallèlement à F.

4. Une urne contient 5 boules numérotées 2, 3, 5, 7 et 11. On tire en même temps et au hasard 2 boules de l'urne, on suppose que les tirages sont équiprobables. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeurs

PARTIE A.- Recopier et compléter les phrases suivantes (1 à 10). (30 pts / 3 pts par question).

1- Si (U_n) est une suite géométrique de premier terme $U_0 = 2$ et de raison $q = 5$, alors la somme S_4 est égale à ..1.5..6..2......

2- L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\ln x \leq 1$ est .]1;...+∞[

3- Pour une équation complexe du second degré à coefficients réels, si le discriminant est négatif, alors les racines de cette équation sont des nombres complexes ....

Si z un nombre complexe tel que $z = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$, alors son conjugué noté $\overline{z}$ est $\overline{z} =$ ....

La loi de probabilité (incomplète) d'une variable aléatoire X est indiquée dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	...	$\frac{1}{16}$

La probabilité de $(X = 3)$ est ....

La forme algébrique du nombre complexe $\dfrac{3-4i}{7+5i}$ est ....

X est une variable aléatoire d'écart-type 7. La moyenne des carrés des valeurs qu'elle prend est 3649, son espérance mathématique est ....

Soit p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$.
Si $p + q$ est un projecteur de E, alors
$(p+q)\circ(p+q) =$ ....

La fonction dérivée première de la fonction f de variable réelle x telle que $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2})$ est. $f'(x) =$ ....

- Soit $A(3;\ 0;\ -2)$, $B(3;\ 3;\ -4)$, $C(-1;\ 1;\ 0)$ trois points d'un espace muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Si O est le barycentre des points (A,α) (B,β) et (C,λ) alors le triplet (α,β,λ) est égal à (...; ...; ...)

PARTIE B.- Obligatoire (30 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x})$.

1) Montrer que tout réel x, $f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$.
On admet que, pour tout réel x, $f(x) = -x + \ln(2 + e^{2x})$.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d) d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathscr{C}$.
Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et de (d).

3) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d') d'équation $y = -x + \ln 2$ est asymptote à $\mathscr{C}$.

4) Étudier les variations de la fonction f.
Montrer que le minimum de la fonction f est égal à $\ln\sqrt{2}$.

5) Construire la courbe $(\mathscr{C})$ de f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

PARTIE C.- Traiter deux (2) des quatre (4) exercices suivants :(40 points)

1- (U_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = -2$ et pour tout naturel n, $U_{n+1} = -\frac{1}{2}U_n + 15$.

1) Calculer U_1, U_2, U_3.
2) On pose $V_n = U_n - 10$.
   a) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   b) Exprimer V_n en fonction de n.
   c) Calculer $S'_n = V_0 + \ldots + V_n$ en fonction de n.
3) a) Exprimer U_n en fonction de n.
   b) Calculer $S_n = U_0 + \ldots + U_n$ en fonction de n.
   c) Déterminer la limite de la suite (S_n).

2- Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ on note A et B les points d'affixes respectives $2i$ et $1 + i$.

1) Soit z un nombre complexe différent de $1 + i$, écrit sous la forme $z = x + iy$, où x et y sont des nombres réels. Calculer, en fonction de x et de y, la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe $Z = \dfrac{z-2i}{z-1-i}$.
2) Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixes z tels que Z soit un réel et l'ensemble (F) des points M d'affixes z tels que Z soit un imaginaire pur.
En utilisant la forme algébrique de Z.
3) a) Soit A et B des nombres réels. Calculer $(A+iB)^2$ et en déduire à quelle condition ce carré est un nombre réel.
   b) Déterminer l'ensemble (G) des points M d'affixes z tels que Z^2 soit un réel.

3- Un joueur lance un dé cubique parfaitement équilibré. Si le nombre apparu sur la face supérieure du dé est impair, le joueur gagne la somme égale au nombre apparu en dollars; si le nombre apparu est pair, le joueur perd la somme égale à ce nombre. On appelle X le gain algébrique du joueur.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.
2) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X.
3) Étudier la fonction de répartition de X.

4- On considère dans un plan affine E_2 de repère $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$ trois points A, B et C de coordonnées respectives $(3,\ 1)$, $(-2,\ 3)$ et $(1,\ 0)$.

1) Soit G le barycentre des points $(A,\ 2)$, $(B;\ 1)$ et $(C,\ -1)$; déterminer les coordonnées de G.
2) Déterminer, suivant les valeurs du réel K, l'ensemble (F) des points $M(x,\ y)$ de E_2 tels que :
$$2MA^2 + MB^2 - MC^2 = K.$$
3) Déterminer l'ensemble (L) des points $M(x,\ y)$ de E_2 tels que :
$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MO}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|.$$