MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE (MENFP)
FILIÈRE D'ENSEIGNEMENT GÉNÉRAL / SÉRIE : (LLA)

EXAMENS DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES
MATHÉMATIQUES (MODELE 1) **METHODIQUE**

Consignes : 1. L'usage de la calculatrice programmable est interdit *2. Le téléphone est interdit dans les salles*
3. Le silence est obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures

***N.B :** Le sujet est composé de deux parties A et B. Dans chaque exercice, le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherches, même incomplètes ou non fructueuses, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation.*

PARTIE A.- Recopier et compléter les phrases suivantes (1 à 10). (50 pts / 5 pts par question).

1- Si A et B sont deux événements contraires d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$, alors on a $p(A \cap B) =$ ......

2- Une pièce de monnaie est truquée de telle façon que « pile » ait trois fois plus de chance d'apparaître que « face ». La probabilité d'obtenir « pile » sur cette pièce de monnaie est égale à ……………

3- La probabilité d'obtenir exactement 2 as en tirant au hasard et simultanément trois cartes d'un jeu de 32 cartes est égale à ..………..

4- Le tableau ci-dessous contient cinq valeurs ponctuelles d'une série bivariée.

x_i	10	12	18	24	36
y_i	50	60	70	90	130

La covariance $\text{cov}(x, y)$ est égale à ………..

5- Les moyennes obtenues par 80 élèves de Terminale en mathématiques ont été regroupées dans le tableau suivant :

Classes	[0; 4[	[4; 8[	[8; 12[	[12; 16[	[16; 20[
Effectifs	8	18	25	21	8

Le nombre d'élèves qui ont une moyenne strictement inférieure à 12 est …….

6- La série suivante correspond aux poids et aux tailles de 6 nouveau-nés d'une maternité.

Poids x_i en kg	2,76	3,56	3,38	2,92	3,22	2,84
Tailles y_i en cm	49	50	51	47	50	48

Le point moyen G du nuage de cette série a pour coordonnées (… ;…)

7- La valeur exacte de la somme :
$4 + 10 + 16 + \ldots + 592 + 598$ est ……………..

8- La suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \dfrac{2}{1+\ln n}$ converge vers …………..

9- L'ensemble des solutions réelles de l'équation $e^{2x-5} = \dfrac{e^{-2x+3}}{e^2}$ est ………..

10- Si f est la fonction numérique définie par : $f(x) = \ln(1+e^x)$, alors $f'(\ln 2) = \ldots$

PARTIE B.- Traiter deux(2) des quatre exercices suivants (25pts par exercice)

1- Le tableau suivant donne la répartition du nombre d'heures par semaine qu'un groupe de 40 jeunes présent sur les réseaux sociaux.

Heure/ Semaine	[4 ;8[	[8 ;12[	[12 ;16[	[16 ;20[	[20 ;24[
Effectif	8	14	6	10	2

a) Représenter l'histogramme de cette série statistique.
b) Déterminer le premier et le troisième quartile. En déduire l'écart interquartile.

2- Dans une urne il y a 10 boules indiscernables au toucher dont 4 rouges, 3 vertes, 2 bleues et 1 blanche. On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne.
a) Quelle est la probabilité que toutes les boules tirées soient rouges ?
b) Quelle est la probabilité que les 3 boules tirées soient de la même couleur ?
c) Quelle est la probabilité que les 3 boules tirées soient de couleurs différentes ?
d) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas de boule rouge dans le tirage ?

3- Soit les fonctions numériques f et g définies par :
$f(x) = e^x + e^{-x}$ et $g(x) = e^x - e^{-x}$
a) Calculer la différence $D = [f(x)]^2 - [g(x)]^2$
b) On considère la fonction h définie par :
$h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$
1) Déterminer l'ensemble de définition de h
2) Calculer $h'(x)$. En déduire le sens de variation de h.

4- Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par son premier terme U_1 et par la relation de récurrence $U_{n+1} = \dfrac{U_n + 8}{U_n + 3}$
a) Démontrer qu'il existe deux valeurs a et b de U_1 pour lesquelles la suite est constante.
b) On suppose $U_1 \neq 2$, la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_n = \dfrac{4+U_n}{U_n - 2}$
Démontrer que la suite (V_n) est une suite géométrique
c) Quelles sont les limites des suites (V_n) et (U_n).

Commentaires ou suggestions autour des compétences disciplinaires à développer

C_1 : Savoir calculer la probabilité de l'évènement composé $A \cap B$ sachant que A et B sont deux évènements contraires.

- ⇨ Il est ici question de se rappeler que deux évènements A et B sont contraires ssi $A \cap B = \phi$ et $A \cup B = \Omega$.

C_2 : Savoir calculer la probabilité d'un évènement dans le cas où il n'y a pas équiprobabilité.

- ⇨ Dans ce cas, on se réfère à la somme des évènements élémentaires qui est égale à l'unité.

C_3 : Savoir calculer la probabilité d'un évènement correspondant au tirage simultané de cartes d'un jeu.

- ⇨ On appliquera ici la formule de Laplace et la notion de combinaison.

C_4 : Savoir calculer la covariance d'un couple de variables d'une série bivariée.

- ⇨ Ici, les formules à appliquer sont : $cov(x,y) = \frac{\sum x_i y_i}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y}$, $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ et $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$.

C_5 : Savoir interpréter un ensemble de données regroupées par classe dans un tableau.

- ⇨ Dans ce cas, on tiendra compte de l'effectif correspondant à chacune des classes.

C_6 : Savoir déterminer les coordonnées du point moyen G associé à une série bivariée.

- ⇨ L'abscisse et l'ordonnée de ce point G sont respectivement la moyenne des x_i et celle des y_i.

C_7 : Savoir calculer la somme d'un certain nombre n de termes d'une suite arithmétique dont on connait le premier terme U_1 et la raison r.

- ⇨ Dans ce cas, on appliquera la formule $S_n = \frac{n \times (U_1 + U_n)}{2}$ avec $U_n = U_1 + n \times r$.

C_8 : Savoir étudier la convergence d'une suite par le calcul de sa limite à l'infini.

- ⇨ Si la limite de la suite est finie, on pourra affirmer que cette dernière est convergente et converge vers le réel obtenu pour la limite.

C_9 : Savoir résoudre dans R une équation exponentielle.

- ⇨ Dans ce cas, on appliquera les propriétés relatives à l'exponentielle.

C_{10} : Savoir calculer l'image d'un réel par la dérivée d'une fonction de la forme $f(x) = \ln u$.

- ⇨ On se rappellera que : $f(x) = \ln u \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{u}$.

  On remplacera tout x rencontré dans $f'(x)$ par le réel en question.

Correction du texte

METHODIQUE

Partie A.-

1- Si A et B sont deux événements contraires d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$, alors on a $p(A \cap B) = \mathbf{0}$

Démarche : *A et B étant deux évènements contraires, on a* $A \cap B = \phi \Rightarrow P(A \cap B) = \mathbf{0}$

2- Une pièce de monnaie est truquée de telle façon que « pile » ait trois fois plus de chance d'apparaître que « face ». La probabilité d'obtenir « pile » sur cette pièce de monnaie est égale à $\mathbf{\frac{3}{4}}$

Démarche : *Avec* $P(p) = 3P(f)$ *et* $P(p) + P(f) = 1$, *on aura* $P(p) + \frac{1}{3}P(p) = 1 \Rightarrow P(p) = \frac{3}{4}$

3- La probabilité d'obtenir exactement 2 as en tirant au hasard et simultanément trois cartes d'un jeu de 32 cartes est égale à $\frac{21}{620}$ **(soit 0,034)**

Démarche : *Désignant cet évènement par A, on peut écrire :* $P(A) = \frac{card\, A}{card\, \Omega} = \frac{C_4^2 \times C_{28}^1}{C_{32}^3} = \frac{21}{620}$

4- Le tableau ci-dessous contient cinq valeurs ponctuelles d'une série bivariée.

x_i	10	12	18	24	36
y_i	50	60	70	90	130

La covariance cov(x, y) est égale à **264**

Démarche : On sait que $cov(x,y) = \frac{\sum x_i y_i}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y}$.

Avec $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{10+12+18+24+36}{5} = 20$ *et* $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{50+60+70+90+130}{5} = 80$, *on a:*

$$cov(x,y) = \frac{500+720+1260+2160+4680}{5} - 20 \times 80 \Rightarrow cov(x,y) = 264$$

5- Les moyennes obtenues par 80 élèves de Terminale en mathématiques ont été regroupées dans le tableau suivant :

Classes	[0; 4[	[4; 8[	[8; 12[	[12; 16[	[16; 20[
Effectifs	8	18	25	21	8

Le nombre d'élèves qui ont une moyenne strictement inférieure à 12 est **51**

Démarche : D'après les données affichées au tableau, on doit considérer les trois premières classes correspondantes aux effectifs 8, 18 et 25. Le nombre recherché est donc donné par la somme 8+18+25. Il y a donc ***51*** *élèves qui ont cette moyenne.*

6- La série suivante correspond aux poids et aux tailles de 6 nouveau-nés d'une maternité.

Poids x_i en kg	2,76	3,56	3,38	2,92	3,22	2,84
Tailles y_i en cm	49	50	51	47	50	48

Le point moyen G du nuage de cette série a pour coordonnées : **(3.11 ; 49.17)**

Démarche : On sait que ce point G est de coordonnées $(\bar{x}; \bar{y})$

Avec $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{2{,}76+3{,}56+3{,}38+2{,}92+3{,}22+2{,}84}{6} = 3.11$ *et* $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{49+50+51+47+50+48}{6} = 49.17$

On a bien $G(3.11 ; 49.17)$.

7- La valeur exacte de la somme : 4 + 10 + 16 + … + 592 + 598 est **30100**

Démarche : Il s'agit de la somme d'un certain nombre n de termes d'une suite arithmétique de premier terme $U_1=4$ *et de raison* $r = 6$.

On peut obtenir ce nombre n à partir de la formule $U_n = U_1 + (n-1) \cdot r \Rightarrow 598 = 4 + (n-1) \times 6 \Rightarrow n = 100$

La somme de ces 100 termes est don donnée par $S_{100} = \frac{100 \times (U_1 + U_{100})}{2} = \frac{100 \times (4+598)}{2} = 30100$

8- La suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \frac{2}{1+\ln n}$ converge vers **0**

Démarche : On a $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{1+\ln n} = \frac{2}{1+\infty} = 0$ *donc la suite (U_n) converge bien vers le réel 0.*

9- L'ensemble des solutions réelles de l'équation $e^{2x-5} = \frac{e^{-2x+3}}{e^2}$ est $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

Démarche : On a $e^{2x-5} = \frac{e^{-2x+3}}{e^2} \Rightarrow e^{2x-5} \cdot e^2 = e^{-2x+3} \Rightarrow e^{2x-3} = e^{-2x+3}$

$\Rightarrow 2x - 3 = -2x + 3$ *(par bijectivité de l'exponentielle)*

$\Rightarrow x = \frac{3}{2}$ d'où $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

10- Si f est la fonction numérique définie par : $f(x) = \ln(1+e^x)$ alors, $f'(\ln 2) = \frac{2}{3}$

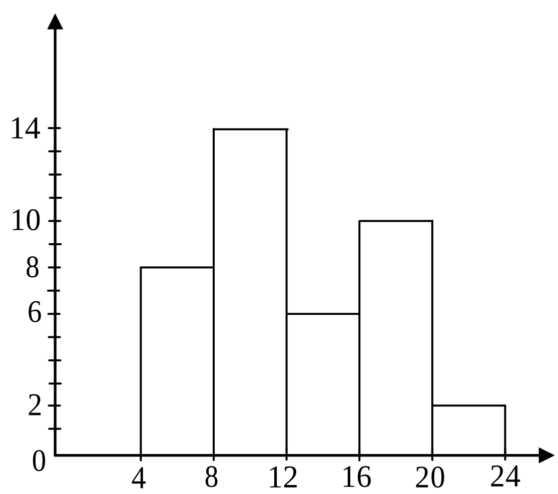
Démarche : *On donne* $f(x) = \ln(1+e^x) \Rightarrow f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ *(car* $f(x) = \ln u \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{u}$ *)*

On a donc $f'(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2}}{1+e^{\ln 2}} = \frac{2}{3}$.

Partie B.-

Exo #1

a) Histogramme



b) Premier quartile.

Effectif total : 40

Rang du 1er quartile : $40 \times \frac{1}{40} = 10$

Le 1er quartile est situé dans la classe [8; 12[

Dans cette classe, chacune de 14 valeurs occupe un intervalle d'amplitude $\frac{12-8}{14} = \frac{2}{7}$

Le rang du 1er quartile dans cette classe est : 10 – 8 = 2

Donc le 1er quartile est :

$Q_1 = 8 + 2 \times \frac{2}{7} \Rightarrow Q_1 \approx 8{,}57$

Troisième quartile $40 \times \frac{3}{4} = 30$

Il est situé dans la classe [16; 20[

Si les 10 valeurs sont réparties régulièrement dans classe, chaque valeur occupe un intervalle d'amplitude $\frac{20-16}{10} = \frac{2}{5}$

Le rang du 3ème quartile est :

$Q_3 = 16 + 2 \times \frac{2}{5} \Rightarrow Q_3 = 16{,}8$

L'écart interquartile est : $Q_3 - Q_1 = 16{,}8 - 8{,}57$

$Q_3 - Q_1 = 8{,}23$

Exo #2

a) La probabilité que toutes les boules tirées soient rouges est : $p_1 = \dfrac{C_4^3}{C_{10}^3}$

b) La probabilité que les 3 boules tirées soient de la même couleur est : $p_2 = \dfrac{C_4^3 + C_3^3}{C_{10}^3} \Rightarrow p_2 = \dfrac{1}{24}$

c) La probabilité que les 3 boules tirées soient de couleurs différentes est :

$$p_3 = \frac{C_4^1 \times C_3^1 \times C_2^1 + C_4^1 \times C_3^1 \times C_1^1 + C_4^1 \times C_2^1 \times C_1^1 + C_3^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{C_{10}^3}$$

ou

$$p_3 = \frac{5}{12}$$

d) La probabilité qu'il n'y ait pas de boule rouge dans le tirage est : $p_4 = \dfrac{C_6^3}{C_{10}^3} \Rightarrow p_4 = \dfrac{1}{6}$

Exo #3

$f(x) = e^x + e^{-x}$ et $g(x) = e^x - e^{-x}$

a) Calcul de $D = [f(x)]^2 - [g(x)]^2$

$D = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$

$D = e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}$

$\boldsymbol{D = 4}$

b) 1) $h(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

L'ensemble de définition de h est: $D_h = \mathbb{R} - \{0\}$

2) Calcul de $h'(x)$

$$h'(x) = \frac{(e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x})}{\left(e^x - e^{-x}\right)^2}$$

$$h'(x) = \frac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}$$

Sens de variation de h

$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) < 0$

La fonction h est strictement décroissante sur D_h.

Exo #4

R-1) Démontrons qu'il existe deux valeurs a et b de U_1 pour lesquelles la suite U est constante.

La suite (U_n) est constante ssi $\exists k \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n = k$

On a donc $U_{n+1} = k$. Comme $U_{n+1} = \dfrac{U_n + 8}{U_n + 3}$ on a : $k = \dfrac{k+8}{k+3}$ et $k \neq -3$

$k^2 + 2k - 8 = 0$ et $k \neq -3$ ce qui correspond à $= +2$ ou $k = -4$.

Donc, on a forcément $U_1 = -2$ ou $U_1 = 4$.

Résumé : (U_n) est une suite constante ssi $U_1 = +2$ ou $U_1 = -4$

R-2) Démontrons que (V_n) est une suite géométrique

(V_n) est une suite géométrique ssi $\exists q \in \mathbb{R}^* :\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ V_{n+1} = qV_n$.

$$V_{n+1} = \frac{4 + U_{n+1}}{U_{n+1} - 2} = \frac{4 + \dfrac{U_n + 8}{U_n + 3}}{\dfrac{U_n + 8}{U_n + 3} - 2} \Rightarrow V_{n+1} = \frac{5U_n + 20}{-U_n + 2}$$

$$V_{n+1} = \frac{5(4 + U_n)}{-(2 - U_n)}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \ V_{n+1} = \dfrac{-5(4 + U_n)}{2 - U_n} \Rightarrow V_{n+1} = -5V_n$ (avec U_1 donc $U_n \neq 2$).

Il en résulte que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = -5$.

En particulier si $U_1 = -4$ on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = -4$, ce qui implique $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = 0$ (donc $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la suite géométrique nulle définie sur $\mathbb{N}^*$) de raison $q = -5$.

R-3) Limites des suites (V_n) et (U_n)

D'abord : si $U_1 = -4$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^* \begin{cases} U_n = -4 \\ V_n = 0 \end{cases}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -4$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$

Si $U_1 \neq -4$ on a $V_1 \neq 0$ donc $V_{n(-5)} =^{n-1}$ et $U_n = \dfrac{2V_n + 4}{V_n - 1}$ donc $U_n = \dfrac{2V_1(-5)^{n-1} + 4}{V_1(-5)^{n-1} - 1}$

Pour la suite (V_n) comme $q = -5 (q \leq -1)$, (V_n) n'a pas de limite

Comme $U_n = \dfrac{(-5)^{n-1}\left[2V_1 + 4\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}\right]}{(-5)^{n-1}\left[V_1 - \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}\right]}$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 2$